

淡江大學 100 學年度碩士班招生考試試題

85-1

系別：統計學系

科目：統計學(含數理統計)

考試日期：2月28日(星期一) 第3節

本試題共 4 大題， 3 頁

本試題雙面印刷

第1題 (32分)

假設 X_1, \dots, X_n 為一組從具有參數 θ 的 Bernoulli 分配中所取出的隨機樣本，其中 $0 < \theta < 1$ 。令 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 。

- (a) (8分) 試證明 T 為 θ 的充分統計量 (sufficient statistic)。
- (b) (8分) 試證明 T 為 θ 的完備統計量 (complete statistic)。
- (c) (8分) 試求 θ 的最大概似估計量 (MLE)。
- (d) (8分) 試證明您在 (c) 所求出的 MLE 為 θ 的 UMVUE。

第2題 (20分)

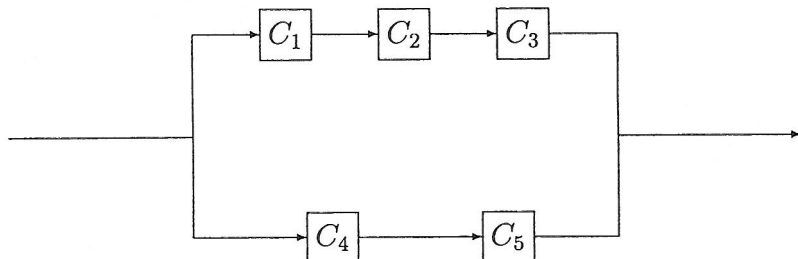
設 X 和 Y 為隨機變數，其中 X 的機率分配為具有參數 λ 的 Poisson 分配，而給定 $X = x$ 下， Y 的條件分配為具有參數 p 的二項分配 $b(x, p)$ 。

- (a) (10分) 請利用條件期望值 $E(e^{tY}) = E[E(e^{tY}|X)]$ 的關係和動差母函數 (m.g.f.) 的唯一性來證明 Y 的機率分配為具有參數 λp 的 Poisson 分配。
- (b) (10分) 證明 Y 和 $X - Y$ 獨立。

第3題 (24分)

假設某零件的壽命分配為具有平均數 θ (單位：小時) 的指數分配，並令 X 為壽命隨機變數。定義可靠度函數為 $R(x) = 1 - F(x)$ 和故障率為 $H(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$ ，其中 $f(x)$ 為機率密度函數 (pdf)，而 $F(x)$ 為累加分配函數 (cdf)。

- (a) (6分) 試推出該零件的可靠度函數 $R(x)$ 。
- (b) (6分) 試寫出該零件的故障率 $H(x)$ 。
- (c) (6分) 若已知該零件的壽命至少為 t 小時，試問該零件壽命至少為 $s + t$ 小時的機率為何？其中 s 和 t 皆為大於零的實數。
- (d) (6分) 若某系統由五個此種零件 (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) 組合而成，其組合如下圖。假設每個零件的壽命為獨立的隨機變數，試推導出該系統的可靠度函數。



背面尚有試題

系別：統計學系

科目：統計學(含數理統計)

考試日期：2月28日(星期一) 第3節

本試題共 4 大題， 3 頁

第4題 (24分)

選擇題。令 X_1, \dots, X_n 為取自常態分配 $N(\mu, 1)$ 的一組隨機樣本，其中參數 $-\infty < \mu < \infty$ 。下面6小題為選擇題，請選取正確的答案，並依題號順序填寫於答案卷上。

(a) (4分) 下列敘述何者為真？

(1) $\sum_{i=1}^n X_i$ 為 μ 的充分統計量

(2) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 為 μ 的 MLE

(3) $\bar{X} - \mu$ 為樞紐量 (pivot)

(4) \bar{X}/μ 為補助統計量 (ancillary statistic)

(b) (4分) $P(X > 0)$ 的不偏估計量 (unbiased estimator) 為何？

(1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

(2) $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^2 - \frac{1}{n}$

(3) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i > 0)$

(4) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

(c) (4分) 對於檢定 $H_0: \mu \leq \mu_0$ 對 $H_1: \mu > \mu_0$ 的 UMP 檢定之棄卻域 (rejection region) 為何？

(1) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i < c$

(2) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i > c$

(3) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 < c$

(4) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 > c$

其中 c 的選擇將使顯著水準滿足所要求。

淡江大學 100 學年度碩士班招生考試試題

85-3

系別：統計學系

科目：統計學(含數理統計)

考試日期：2月28日(星期一) 第3節

本試題共 4 大題， 3 頁

(d) (4分) 若取顯著水準 α ，則在第(c)小題中UMP檢定的 c 值為何？

- (1) $\mu_0 - t_{\alpha(n)} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (2) $\mu_0 + t_{\alpha(n)} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (3) $\mu_0 - z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- (4) $\mu_0 + z_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}$

其中 $t_{\alpha(n)}$ 表自由度 n 的 t 分配之右尾機率值 α 百分位數、 z_{α} 則表標準常態分配右尾機率值 α 百分位數。

(e) (4分) 在第(c)和第(d)小題中所得到的UMP檢定其檢定力函數(power function)為何？

- (1) $P(Z > (\mu_0 - \mu)\sqrt{n} + z_{\alpha})$
- (2) $P(Z > (\mu_0 - \mu)\sqrt{n} - z_{\alpha})$
- (3) $P(T > (\mu_0 - \mu)\sqrt{n} + t_{\alpha(n)})$
- (4) $P(T > (\mu_0 - \mu)\sqrt{n} - t_{\alpha(n)})$

其中 Z 表標準常態隨機變數，而 T 表自由度 n 的 t 分配隨機變數。

(f) (4分) 若 $\mu_0 = 0$ ， $\mu_1 = 1.2$ 和 $n = 9$ ， $\alpha = 0.05$ ，則在第(c)和第(d)小題中所得到的UMP檢定其檢定力(power)大約為何？

- (1) 0.95
- (2) 0.975
- (3) 0.05
- (4) 0.025