129

淡江大學八十九學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系　　科目：統　計　學

本試題共 1 頁

一、設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為由常態母體 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出之隨機樣本，且 $n > k > 2$。令 $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$，
$\overline{X}_k = \sum_{i=1}^{k} X_i / k$，$\overline{X}_{n-k} = \sum_{i=k+1}^{n} X_i / (n-k)$，$S_k^2 = \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}_k)^2 / (k-1)$，$S_{n-k}^2 = \sum_{i=k+1}^{n} (X_i - \overline{X}_{n-k})^2 / (n-k-1)$，
$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 / (n-1)$。

(a) 試寫出下列各統計量的機率分配：(12%)

(1) $[\overline{X}_k + \overline{X}_{n-k}]/2$，(2) $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/S$，(3) $[(k-1)S_k^2 + (n-k-1)S_{n-k}^2]/\sigma^2$，(4) S_k^2 / S_{n-k}^2。

(b) 試求 μ/σ 之均勻最小變異數不偏估計量(UMVUE)。(8%)

二、設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為由均勻(uniform)分配 $U(0, \theta)$，$\theta > 0$，抽出的隨機樣本，$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

(a) 試求 θ 之充分(sufficient)統計量，並求証它是否為完備(complete)統計量？(5%)

(b) 試求 θ 之 UMVUE. (5%)

(c) 為檢定 $H_0: \theta \le \frac{1}{2}$ v.s. $H_1: \theta > \frac{1}{2}$，顯著水準為 0.05.

(1) 寫出檢定方法(或步驟)及檢定力函數(power function). (10%)

(2) 需抽出多少樣本大小 n，方可使在 $\theta = \frac{3}{4}$ 時之檢定力達到 0.98？(5%)

(3) 若 $n = 20$，$Y_n = 0.48$，試求其 p-value. (5%)

三、設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為由 Bernoulli 分配 $B(1, \theta)$，成功的機率為 θ，$\theta \in \Omega = (0,1)$，抽出之隨機樣本，若 θ 之事前(prior)分配是 Beta 分配，參數為 $\alpha (>0)$ 及 $\beta (>0)$，且考慮平方誤差損失函數(Square error loss function)。

(a) 試求 θ 之 Bayes 估計量及其風險函數(risk function). (10%)

(b) 試求 θ 之大中取小(minimax)估計量. (5%)

四、設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為由機率密度函數(p.d.f.)是 $f(x; \alpha, \beta) = x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} / [\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}]$，$x > 0$，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，之母體抽出的一組隨機樣本.

(a) 試求 α 及 β 之動差(moment)估計量. (10%)

(b) 試求 $2\sum_{i=1}^{n} X_i / \beta$ 之分配. (5%)

(c) 若 $\alpha = 3$，試求 β 之 $100(1-\alpha)\%$ 的信賴區間.（以適當的符號表示）(5%)

五、若隨機變數 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 滿足 $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為常數，$\varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，$\sigma^2$ 未知。試求 (a) β 之最大概度估計量(MLE)，並求証此 MLE 是否為 β 之不偏估計量？(10%)

(b) β 之 MLE 的分配. (5%)