淡江大學100學年度碩士班招生考試試題

17

系別：數學學系　　　　科目：微積分60%及線性代數40%

考試日期：2月28日(星期一) 第2節　　　　本試題共 6 大題， 1 頁

1. 計算各式極限 (每小題8分, 共40分)

 (a) $y(x)=x^{\tan(x)}$, 計算$y'(x)$,

 (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$,

 (c) $\displaystyle\int e^x\sin^2 x\,dx$,

 (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$,

 (e) $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 其中 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\le x^2+y^2\le 1\}$.

2. (10分) 求曲面$x^2-yz=4$上, 距離原點 $(0,0,0)$ 最近的點, 並求出其距離。

3. (10分) 令 $y(x)=\sqrt{x}$, $1\le x\le 4$.

 (a) 令 V 爲 $x=2$, $x=4$, $y(x)$ 和 X 軸所圍成區域對 Y 軸旋轉所得之旋轉體, 求 V 體積。

 (b) 令 S 爲曲線 $C=\{(x,y(x))|1\le x\le 4\}$ 對 X 軸旋轉所得旋轉曲面, 求 S 面積。

4. (10分) 令 W 爲 $\mathbb{R}^3$ 之子空間。定義 $W^{\perp}=\{v\in\mathbb{R}^3 | <v,w>=0 \text{ for all } w\in W\}$. 線性轉換$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 表示如下

$$T(x,y,z)=(x+2y+z, z, x+2y).$$

 求 $W=Range(T)$ 的維度以及 $W^{\perp}$.

5. $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^n$ 爲一個實數 $n\times n$ 方陣, A^t 表 A 的轉置矩陣 (transpose)。證明

 (a) (5分) 若 $A=A^t$, 則 A 的固有值必爲實數。

 (b) (5分) 若 $A=A^t$, λ_1 和λ_2 爲 A 的相異固有值。證明 λ_1 所對應的的固有向量 v_1 和 λ_2 所對應的的固有向量 v_2 互相垂直。

 (c) (5分) 若 $A=-A^t$, 則 A 的固有值必爲0或純虛數。

6. 令 $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

 (a) (10分) 求 A 的固有值和固有向量。

 (b) (5分) 求一個 3×3 矩陣 Q, 使得 QAQ^{-1} 爲對角矩陣。