

淡江大學 99 學年度碩士班招生考試試題

系列：數學學系

科目：微積分 60%及線性代數 40%

准帶項目請打「V」	
	計算機

本試題共 / 頁，10 大題

*** 共 10 大題，每大題 10 分，計算過程必須寫清楚，直接寫答案不予記分。***

一、求下列各題的極限值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{-x}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^4 + 2x} - 12}$$

二、求下列各題的積分：

$$(1) \int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx \quad (2) \int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$$

三、設 $y^2 - ye^x = 12$ ，求此方程式的圖形在 $x = 0$ 時的切線方程式。四、設 $f(x) = \sqrt{x+3}$

- (1) 分別求 $f(x)$ 的 1 階、2 階、3 階泰勒多項式 (Taylor polynomial)。
- (2) 將 $f(x)$ 表示成泰勒級數 (Taylor Series)。
- (3) 求(2)所得到的泰勒級數的收斂區間(the interval of convergence)。

五、求函數 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ 在區域 $R = \{(x, y) | x^2 + 4y^2 \leq 24\}$ 的極大值與極小值。六、(1) 求由四條曲線 $y = 3x^2 - 3$, $y = 2x + 5$, $x = 0$ 以及 $x = 3$ 所圍成區域的面積。

(2) 求由四條曲線 $y = 2x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$, $x = -1$ 以及 $x = 1$ 所圍成的區域繞著直線 $x = 3$ 旋轉所形成的實體(solid) 的體積。

七、求使得方程組
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + sx_3 = 0 \\ x_1 + sx_2 + x_3 = 0 \\ sx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 的解集合的空間分別為

- (1) 通過原點的一條直線的所有 s 的值；
- (2) 通過原點的一個平面的所有 s 的值；

八、設 V 為一個內積空間(inner product space)， W 為 V 的子空間(subspace)。令 $W^\perp = \{\vec{v} \in V \mid \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W\}$ 。證明：

- (1) W^\perp 是 V 的子空間(subspace)；
- (2) $W^\perp \cap W = \{\vec{0}\}$ 。

九、設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。求 A 的特徵值(eigenvalues)及其對應之特徵向量(eigenvectors)。

十、設一個線性轉換(linear transformation) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 表示為

$$T(x, y, z) = (x - y - z, x + 3y + z, -3x + y - z)$$

- (1) 寫出 T 的標準矩陣(standard matrix) 表示式；
- (2) 若有可能，在 \mathbb{R}^3 中找出一組基底 B ，使得 T 相對於 B 的矩陣為一個對角矩陣。