

淡江大學八十九學年度碩士班招生考試試題

系別：資訊管理學系

科目：離散數學

本試題共 / 頁

**** 務必依序作答 ****

符號說明: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, \mathbb{R} 是實數系, $2^X = \{E \mid E \subseteq X\}$, $X \times Y = \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$.

1. [10%] 設 H 代表“喝酒”, K 代表“開車”.
 - (a) 以 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 將“喝酒不開車, 開車不喝酒”翻譯成邏輯式 (well-formed formula in propositional logic). [5%]
 - (b) 將上式化成不含 $\rightarrow, \leftrightarrow$ 的式子, 並儘量化簡. [5%]

2. [10%] 設 $A = \{1, 2\}, B = \{3\}$.
 - (a) 寫出 $A \times B = ?$ [5%]
 - (b) 寫出 $A \times 2^B = ?$ [5%] (注意: 作答的符號必須正確, 逗點不可寫成句點)

3. [15%] 設函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 - (a) 對這個 f 寫出“ f 為一對一函數”的定義. [5%]
 - (b) 若 f 定義如 $f(x) = (x^2, -x^2)$. 問 f 是不是一對一函數? (須證明或舉反例). [5%]
 - (c) 若 f 定義如 $f(x) = (x^2, x^3)$. 問 f 是不是一對一函數? (須證明或舉反例) [5%]

4. [20%] 設 $A = \{1, 4, 5, 7\}$, 函數 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 定義如 $f(x) = (-1)^x$, 設 A 上的關係 R 定義如下

$$(x, y) \in R \iff f(x) = f(y)$$
 - (a) 以表列法明確寫出集合 R . [5%]
 - (b) 證明 R 是等價關係 (equivalence relation). [10%]
 - (c) 以表列法明確寫出商集合 A/R . [5%]

5. [15%] (本題不必證明, 寫出答案即可)
 - (a) 寫出任一個一對一且映成的函數 $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \geq 3\}$. [5%]
 - (b) 寫出任一個一對一且映成的函數 $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \text{ 為偶數}\}$. [5%]
 - (c) 寫出任一個一對一且映成的函數 $h: \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$. [5%]

6. [10%] 設 $n \leq 0$ 時, $A_n(x) = B_n(x) = x$. 而在 $n \geq 1$ 時, $A_n(x) = B_{n-1}(x+3n)$, $B_n(x) = A_{n-1}(x-3n)$.
 - (a) 寫出 $A_1(0) = ?$ $B_1(0) = ?$ $A_2(0) = ?$ $A_3(0) = ?$ $A_4(0) = ?$ [5%]
 - (b) $A_{2000}(0) = ?$ (須有推導過程) [5%]

7. [20%] (以 state transition diagram 描寫 DFA. 本題若 (a) 小題答錯則 (b) 小題不計分)
 設 $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ 中 } a \text{ 的個數是 } 3 \text{ 的倍數}\}$, $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ 中 } b \text{ 的個數是 } 2 \text{ 的倍數}\}$,
 - (a) 造一個 DFA M_1 , 使 M_1 能辨認 (recognize, 或稱 accept) L_1 . [10%]
 - (b) 造一個 DFA M_2 , 使 M_2 能辨認 $L_1 \cap L_2$. [10%]