

# 淡江大學八十七學年度碩士班入學考試試題

系別：資訊管理學系

科目：離散數學

本試題共 2 頁

\*\*\*\* 本試題應依序作答 \*\*\*\*

符號說明:

$2^X$  表示  $X$  的冪集合, 即  $2^X = \{E \mid E \subseteq X\}$ .

$X \times Y$  表示  $X, Y$  的積集合, 即  $X \times Y = \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$ .

對  $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ ,  $\rho * \sigma = \{(a, b) \in X \times X \mid \exists t \in X, (a, t) \in \rho, (t, b) \in \sigma\}$

$\rho^1 = \rho, \rho^2 = \rho * \rho, \rho^3 = \rho * \rho * \rho, \dots$  (依此類推)

$I_X = \{(a, a) \mid a \in X\}$

1.(5%) 對  $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$  寫出  $2^A = ?$   $2^A \times B = ?$  (作答的符號必須正確)

2.(10%) 設  $X = \{1, 2, 3, 4\}, f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}, g = \{(1, 4), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$

(a) 寫出  $f * f$ , 及  $g * f$

(b) 是否存在正整數  $i$ , 使  $g^i = I_X$ ?

若存在, 請找出一個  $i$ . 若不存在, 請解釋原因.

3.(15%) (a) 寫出對稱關係(symmetric relation)的定義.

(b) 接第2題, 問  $f$  是不是對稱關係?

若是, 請加以證明. 若不是, 請說明理由.

(c) 接第2題, 問  $g$  是不是由  $X$  映入  $X$  的可逆函數?

若是, 請寫出它的反函數(不必證明). 若不是, 請說明理由.

4.(10%) 函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  定義如  $f(x) = (2x+1, x^2)$ . 問  $f$  是不是一對一函數?

若是, 請加證明. 若不是, 請舉反例.

5.(10%) 設  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\}$

(a) 寫出任一個一對一且映成的函數  $f: A \rightarrow B$ . (不必證明,  $\mathbb{R}$  是實數系)

(b) 寫出任一個一對一且映成的函數  $g: B \rightarrow A$ . (不必證明)

\*\*\*\* 接下頁 \*\*\*\*

# 淡江大學八十七學年度碩士班入學考試試題

系別：資訊管理學系

科目：離散數學

本試題共 2 頁

6.(10%) 設  $n \leq 0$  時,  $A_n(x, y) = B_n(x, y) = C_n(x, y) = D_n(x, y) = (x, y)$ .

而在  $n \geq 1$  時,  $A_n(x, y) = B_{n-1}(x+n, y)$ ,  $B_n(x, y) = C_{n-1}(x, y+n)$ ,

$C_n(x, y) = D_{n-1}(x-n, y)$ ,  $D_n(x, y) = A_{n-1}(x, y-n)$ .

(a) 寫出  $A_1(0,0) = ?$   $B_1(0,0) = ?$   $C_1(0,0) = ?$   $D_1(0,0) = ?$

(b) 寫出  $A_2(0,0) = ?$   $A_3(0,0) = ?$   $A_4(0,0) = ?$

(c)  $A_{1998}(0,0) = ?$  (須有推導過程)

7.(15%) 設數列  $A = \langle a_n \mid n=0,1,2,\dots \rangle = \langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$

$B = \langle b_n \mid n=0,1,2,\dots \rangle = \langle 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots \rangle$

(a) 寫出  $a_n$  的通式

(b) 用具初值的遞迴關係式(recursive relation)描寫數列  $B$ .

(c) 求出  $b_n$  的通式 (須有推導過程)

8.(10%) 考慮 DFA (deterministic finite automata)  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ,

其中狀態集  $Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$ , 字母集  $\Sigma = \{a, b\}$ ,

起始狀態  $q_0 = s_0$ , 終結狀態集  $F = \{s_3\}$ . 而狀態移轉函數  $\delta$  如下:

	a	b
s <sub>0</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>3</sub>
s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	s <sub>4</sub>
s <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>3</sub>
s <sub>3</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>3</sub>
s <sub>4</sub>	s <sub>4</sub>	s <sub>4</sub>

(a) 畫出  $M$  的狀態移轉圖 (state transition diagram).

(b) 以集合的方式寫出  $M$  所辨認 (recognize, 或稱 accept) 的語言.

(c) 以規則表示式 (regular expression) 寫出  $M$  所辨認的語言.

9.(15%) 假設在某個 context-free grammar 之下有一個 derivation 如下:

$S \Rightarrow aBcD \Rightarrow aCEcD \Rightarrow acEcD \Rightarrow acEcFd \Rightarrow acEcfD \Rightarrow acecfd$

(a) 畫出它的 derivation tree.

(b) 對 (a) 的 derivation tree, 寫出 leftmost derivation.

(c) 對 (a) 的 derivation tree, 寫出 rightmost derivation.