

# 淡江大學八十八學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系

科目：統計學

本試題共 2 頁

- 午試題雙面印製
1. 令  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為從幾何分配機率函數為  $f(x; \theta) = \theta(1-\theta)^x$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  所抽出的  $n(n>1)$  個隨機樣本；
    - (1) 求  $\theta$  之最大概似估計量(MLE)。 (5分)
    - (2) 求  $\theta$  之 MLE 的極限分配(limiting distribution)。 (5分)
    - (3) 試證  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  為  $\theta$  的完備充分統計量(complete sufficient statistic)。 (5分)
    - (4) 試證  $\frac{Y}{n}$  為  $\frac{1-\theta}{\theta}$  的均勻最小變異不偏估計量(UMVUE)。 (5分)
    - (5) 求  $\theta$  的 UMVUE。 (5分)
  
  2. 設一圓的半徑真正值為  $\theta$ ，則此圓面積為  $\pi \theta^2$ 。今欲測量此圓半徑，已知測量誤差呈一常態分配  $N(0, \sigma^2)$ ，但  $\sigma^2$  未知；又  $X_1, X_2, \dots, X_n$  表  $n$  次獨立的半徑測量值，
    - (1) 試求  $\theta$  和  $\sigma^2$  之最大概似估計量(MLE)。 (5分)
    - (2) 試以動差法求  $\theta$  的估計量。 (5分)
    - (3) 證明(2)中估計量為一致估計量(consistent estimators)。 (5分)
    - (4) 請找出(1)中 MLE 的函數，並證明此函數為該圓面積的不偏估計量。 (5分)
  
  3. 設  $X$  的機率函數為  $f(x; \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$ ,  $x = 0, 1$ ，其他為 0。欲檢定  $H_0: \theta = \frac{1}{2}, H_1: \theta < \frac{1}{2}$ ，取 5 個隨機樣本  $X_1, X_2, \dots, X_5$ ；若  $\sum_{i=1}^5 X_i \leq c$  則棄卻  $H_0$ 。
    - (1) 證明該檢定為均勻最強力檢定(uniformly most powerful test)。 (5分)
    - (2) 試求當  $c=0$  時該檢定的顯著水準。 (5分)
    - (3) 當顯著水準  $\alpha = \frac{1}{32}$  時，請繪出該檢定的檢力曲線(power curve)。 (5分)
  
  4. 設淡江大學有  $N$  個學生，欲估計該校學生擁有行動電話的比例  $p$  之值。若利用簡單隨機抽樣法(不放回)抽出  $n$  個學生，其中有  $X$  個學生擁有行動電話，則  $\frac{X}{n}$  可以用來估計  $p$ 。
    - (1) 試證  $\frac{X}{n}$  為  $p$  的不偏估計量。 (4分)
    - (2) 試求  $V(\frac{X}{n})$ 。 (4分)
    - (3) 證明  $V(\frac{X}{n})$  的不偏估計量為  $\hat{V}(\frac{X}{n}) = \frac{N-n}{N(n-1)} \frac{X}{n} (1 - \frac{X}{n})$ 。 (4分)
    - (4) 若  $N=20000$  且欲使  $\frac{X}{n}$  估計  $p$  之誤差不超過 0.03 的信賴度達 95%，試問  $n$  應為多少？ (4分)
    - (5) 若根據(4)所求樣本數進行抽訪，經計算得樣本比例為 0.2，則求  $p$  之估計值及 95% 的估計誤差界限。 (4分)

▶ 注意背面尚有試題 ▶

# 淡江大學八十八學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系

科目：統計學

本試題共 2 頁

本試題雙面印製

5. 某房屋不動產公司想知道家庭收入與其房子坪數的關係，做為銷售房屋的參考。今隨機抽出 10 戶，其資料如下：

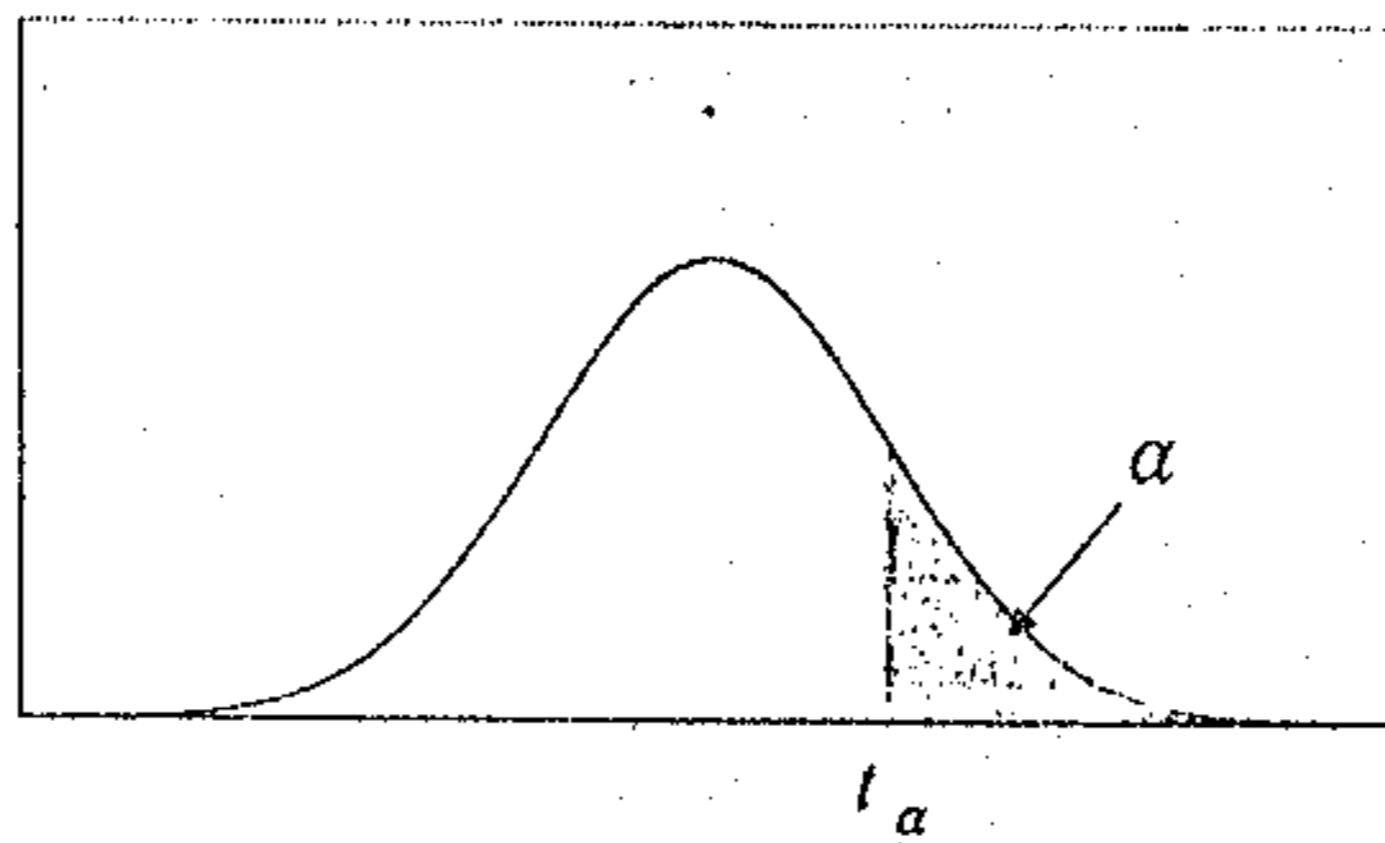
坪數	Y	22	24	42	36	34	32	54	26	50	30
收入(萬元)	x	66	78	135	117	84	150	168	102	180	120

利用簡單線性迴歸  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  ,  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$

- (1) 求 Y 對 x 的樣本迴歸線。 (4 分)
- (2) 求判定係數(coefficient of determination)並解釋之。 (4 分)
- (3) 求家庭收入每增加 1 萬元，其房子坪數增加多少？ (4 分)
- (4) 家庭收入是否對房子坪數有影響，請以  $\alpha = 0.05$  檢定之。 (4 分)
- (5) 張三的家庭收入為 70 萬，求其房子坪數的 95% 的信賴區間。 (4 分)

t 分配臨界值表

$$P(t > t_\alpha) = \alpha$$



d.f.	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	d.f.
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	$\infty$

◀ 注意背面尚有試題 ▶