

淡江大學 101 學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系

科目：基礎數學(含微積分、線性代數)

考試日期：2月26日(星期日) 第2節

本試題共 9 大題， 1 頁

1. 請說明微分中間值定理與積分中間值定理之間的關係 (10%)

2. 請求出 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{2x-1}$ (10%)

3. 請問 $\exp(x)$ 是否 uniformly continuous? 請說明或證明你的答案 (10%)

4. 請問 $\int_0^{\infty} \exp(x - 2e^x) dx$ 是否存在? 若存在, 請算出積分值 (10%)

5. 假設 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 可微分, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ 。若 $f(x)$ 的一次微分在 $[0, \infty)$ 為遞增函數, 請證明 $g(x)$ 在 $(0, \infty)$ 也是遞增函數 (10%)

6. 請解出以下聯立方程式：

$$\begin{aligned} 2X_1 - 4X_2 + X_4 + 7X_5 &= 11 \\ X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 + 9X_5 &= 12 \\ -X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 - 5X_5 &= 16 \end{aligned} \quad (10\%)$$

7. 若 P 為 $m \times m$ 可逆矩陣, Q 為 $n \times n$ 可逆矩陣, A 為 $m \times n$ 矩陣, 請證明 $r(PA) = r(A) = r(AQ)$ (10%)

8. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 為矩陣 A 的三個相異特徵值(eigen values), 且 X_1, X_2, X_3 為其相對的特徵向量 (eigen vectors), 請證明 X_1, X_2, X_3 為線性獨立 (15%)

9. 假設 $f(x) = 0$ if $x \in [0, 0.5) \cup (0.5, 1]$, $f(x) = 1$ if $x = 0.5$, 且 $g(x) = x^2$, 請算出 $\int f(x) dg(x)$ (15%)