84

淡江大學 100 學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系　　　　科目：基礎數學(含微積分、線性代數)

考試日期：2 月 28 日(星期一) 第 2 節　　　　本試題共 9 大題， 1 頁

下列所有計算或證明題，皆須付計算過程或證明過程，否則不予計分

1. 計算雙重積分 $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3+1}\,dy\,dx$ 之值。(提示:變換積分順序) (10 分)

2. 函數 $f(x)=\begin{cases} px^2+2 & 0 \le x \le 3 \\ 3x+11 & x>3 \end{cases}$，若 f 在 $x=3$ 處連續，試計算 p 之值。(8 分)

3. 令 $F(x)=x^3+2x+1$; $G(x)=\int_0^x \frac{4t^3}{1+t^4}dt$，試分別計算導數 $\frac{d}{dx}F(x)$ 與 $\frac{d}{dx}G(x)$。(4 分、6 分)

4. 試計算 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 處的泰勒級數(Taylor's series)並且寫出此級數的收斂範圍。(10 分)

5. 利用中間值定理(Intermediate Value Theorem)與洛爾定理(Rolle's Theorem)證明方程式 $x^3+2x+1=0$ 有唯一實數解。(10 分)

6. a) 令矩陣 $A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$，試證明 $\det(A)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$。(8 分)

   b) 令 x_1, x_2, x_3 爲相異三數，請證明對任意給定的 p,q,r 而言，必存在唯一的多項式 $f(t)=c_0+c_1t+c_2t^2$，滿足 $f(x_1)=p$, $f(x_2)=q$, $f(x_3)=r$。(提示:可利用本大題之 a) 小題的性質，證明 c_0, c_1, c_2 之值唯一決定) (10 分)

7. 令 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$，其中 a,b,c 皆爲實數且 A 的特徵值(eigenvalue)爲 λ_1 與 λ_2。

   a) 試證明 A 的特徵值 λ_1 與 λ_2 必爲實數。(8 分)

   b) 試證明 "$\lambda_1>0$ 且 $\lambda_2>0$" 若且唯若 "$a>0$ 且 $\det(A)>0$"。(10 分)

8. 試證明 $\det\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ (\sin\theta-\cos\theta\sin\theta) & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{pmatrix}$ 之值與 θ 無關。(8 分)

9. 令 $x \in R$，請探討 $S=\{\sin^2 x, \cos^2 x, 2\}$ 爲線性獨立或線性相依。(8 分)