淡江大學九十一學年度碩士班招生考試試題

系別：統計學系　　　　科目：機　率　論

准帶項目請打「○」否則打「×」	
計算機	字典
○	×

本試題共 1 頁

一、獨立地投擲一公正的硬幣直至第一次出現正面為止，設隨機變數 X 表所需投擲的次數；且令 $C_1=\{c \mid c$ 為 H, TH, TTH, TTTH, 或 TTTTH$\}$,
(20%)
$C_2=\{c \mid c$ 為 TTTTH 或 TTTTTH$\}$.

試求 (a) $P(C_1\cap C_2)$, (b) $P(C_1^*\cap C_2^*)$, (c) $P(C_1\cup C_2^*)$, (其中 C^* 表 C 之餘集)

(d) X 之 p.d.f. (probability density function), 及 (e) $E(X)$, (X 之期望值).

二、(15%) (a) 設隨機變數 X 之動差生成函數 (moment generating function, m.g.f.) 為 $M(t)$, $|t|<h$, 試求證：$P_r(X\ge a)\le e^{-at}M(t)$, $0<t<h$.

(b) 設 X 具有 gamma distribution, 參數 (parameters) 為 α 與 β, 試求証：
$P_r(X\ge 2\alpha\beta)\le(\frac{2}{e})^{\alpha}$. (利用 (a) 之結果)

三、(15%) 設 X, Y 兩隨機變數之聯合機率密度函數 (joint p.d.f.) 為 $f(x,y)=p^2(1-p)^{x+y}$, $x=0,1,2,\cdots$; $y=0,1,2,\cdots$。令 $W=\min(X,Y)$, $Z=X+Y$, 試求：(a) W 之 p.d.f. (b) Z 之 p.d.f. (c) $P_r(Y=y\mid Z=3)$.

四、(10%) 設某天進入某銀行之人數為具卜瓦松 (poisson) 分配，參數為 λ 之隨機變數。若到此銀行去的每一人為男性的機率是 p, 為女性的機率是 $1-p$, 則到此銀行去的男性人數 X 與女性人數 Y 之分配分別為何？

五、(15%) 設 X_1, X_2 為由在區間 $(0,1)$ 上具均勻 (uniform) 分配之母體抽出之一對隨機樣本 (random sample), 且令 $Y=X_1+X_2$, $Z=X_1X_2$, (a) 試分別求出 Y 與 Z 之 pdf's.
(b) 試求 $V=-2\sum_{i=1}^{2}\ln X_i$ 之分配.

六、(25%) 設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 為由常態母體, $N(\mu,\sigma^2)$, 抽出之一組隨機樣本, 且令 $\overline{X}_n=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$,
$S_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2}{n}$, $T_n=(\overline{X}_n-\mu)/\sqrt{S_n^2/(n-1)}$, $Y_1=X_1+\delta X_3$, $Y_2=X_2+\delta X_3$.

(a) 試求 S_n^2 之平均數, $E(S_n^2)$, 及變異數, $V(S_n^2)$.

(b) 試求 Y_1 與 Y_2 之相關係數 (correlation coefficient), $\rho(Y_1,Y_2)$.

(c) 試求 Y_1 與 Y_2 之 joint m.g.f..

(d) 試求證：T_n 之極限分配 (limiting distribution) 為 $N(0,1)$.