

# 淡江大學八十七學年度碩士班入學考試試題

系列：統計學系

科目：機率論

本試題共 1 頁

- 一. (20%) 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為由常態母體,  $N(\mu, \sigma^2)$ , 抽出之一組隨機樣本,  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,  $S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ .
- 求證  $E(S_n^2) = \sigma^2$ .
  - 求證  $(n-1)S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$ , 自由度為  $n-1$  之卡方分配.
  - 求證  $\text{Cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$ .
  - 求  $T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S_n}$  之極限分配 (limiting distribution).

- 二. (20%) 設有  $N$  個人將他們的帽子丟向房子的中央, 經混合後, 每人隨機選取一頂帽子. 若所選取的帽子是自己的, 則產生一配對. 試求
- 沒有一個配對產生的機率.
  - 恰有  $m$  個配對產生的機率.
  - 已知恰有  $m$  個配對產生的情況下, 第  $j$  個配對產生的機率. ( $j=1, 2, \dots, m$ ).
  - 產生配對之人數的期望值.

- 三. (20%) 一電子零件商分批購買每批有 10 個單位的產品. 其策略為: 從每批產品中, 隨機取出 3 個零件檢驗. 若取出的 3 個零件均為良品, 則接受; 否則退貨. 已知 30% 的批數有 4 個不良品, 70% 的批數只有一個不良品. 試求
- 購買商退貨的批數比例為多少?
  - 含有  $i$  個不良品之批數中, 會被退貨之比例為多少? (分別以  $i=1, 4$  求解)
  - 已知某批產品被退貨, 試求該批產品含有 4 個不良品之條件機率.

- 四. (15%) 設單位時間內, 某事件發生的次數服從 Poisson 分配,  $P(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ ; 令  $Y_k$  表  $k$  個單位時間區間  $(0, k]$  內發生此事件的次數, 且令  $T$  表示此事件發生  $n$  次所需的時間長, 則
- $Y_k$  之分配為何? 同時寫出其機率密度函數 (p.d.f). (5%)
  - 求  $T$  之分配, 並寫出其 p.d.f. (10%)

- 五. (10%) 設  $X$  為一隨機變數,  $g(x)$  為一凸函數 (convex function), 試求證  $E[g(X)] \geq g[E(X)]$ . (設其期望值均存在).

- 六. (15%) 設  $X_1, X_2, \dots, X_n$  為一組具均勻分配,  $\text{Uniform}(0, a)$ , 之隨機樣本;  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  為其有序統計量 (order statistics), 令  $R = Y_n - Y_1$ ;  $V = (Y_1 + Y_n)/2$ . 試求
- $R, V$  之 joint p.d.f.
  - $R$  與  $V$  之 marginal p.d.f.