

淡江大學 100 學年度碩士班招生考試試題 (00)

系別：管理科學學系

科目：微 積 分

考試日期：2 月 28 日(星期一) 第 2 節

本試題共 4 大題，1 頁

1. 試求下列各極限值 (若不存在，請說明理由) (每小題 8 分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{1/x}} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sqrt{x^2 + 1} - x^2\right)$$

2. (1) 設 $f(x) = e^{-3x} + x^x - \ln(\ln x)$, $x > 0$, 試求 $f'(x)$ (6 分)

(2) 設 $g(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{u^2} du$, 試求 $g'(x)$ (6 分)

(3) 設 $h(x, y, z) = xyz$, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, 試求 $\frac{dh}{dt}$ (8 分)

(4) 設 $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, 試求 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ (10 分)

3. 試求下列各積分

(1) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$ (8 分)

(2) $\int_2^3 \frac{x+1}{x^2+2x-3} dx$ (8 分)

(3) $\iint_S f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, 其中

$$S = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0 \} \text{ 且}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}, & x_1 > 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{其他值} \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

4. 假設市場上有 A 和 B 兩種物品，其單位售價分別為 20 元和 50 元。已知某消費者購買 A 物品 x 單位和 B 物品 y 單位時的效用函數為 $U(x, y) = (x+5)(y+4)$ ，而其消費支出受到預算的限制，預算總額為 500 元。試利用 Lagrange multiplier 方法求此兩種物品的最佳購買數量及其最大效用，即求

$$\text{Maximize } U(x, y)$$

$$\text{Subject to } 20x + 50y = 500 \quad (12 \text{ 分})$$