

系別：管理科學研究所

科目：微 積 分

准帶項目請打「V」	
X	簡單型計算機

本試題共 7 頁

1. (20%) 試證或求值下列各小題：(每小題 4 分)

(a) 試證 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ 為收斂。並求其上限值。(b) 試判定 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+k}{1+k+k^2+k^3} \right)$ 為收斂或發散。(c) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{x^2}$ 之值。(d) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left| \frac{\sin u}{u} \right| du$ (e) 求不定積分 $\int e^x \sin x dx$ 2. (20%) 求由曲線 $y = 4x - x^2$ 與直線 $y = x - 4$ 所圍成之面積。3. (20%) 試將 $f(x) = x \ln x$ 展成 $(x-1)$ 之多項式至 x 之三次式。若 $1 \leq x \leq 1.3$ ，試估計該函數與多項式之最大誤差。4. (20%) 若 a_0, a_1, \dots, a_n 為實數，且 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0$ ，試證 n 次方程 $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ 必存在一個根介於 0 與 1 之間。5. (20%) 設 $a_n > 0, i = 1, 2, \dots$ ，且 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 。若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ 發散，試證 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收斂。