淡江大學八十九學年度碩士班招生考試試題

系別：水資源及環境工程學系　　科目：工程數學

本試題共 1 頁

(一) If $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 且可用 Implicit function 表示為：

(25%) $F(u,v,x,y)=0$ 及 $G(u,v,x,y)=0$

請證明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-F_x & F_v\\ -G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}} \quad 及 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}F_u & -F_y\\ G_u & -G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

(二) 請求解自原點至双曲線 $x^2+8xy+7y^2=225$ 之最短距離（可利用 Lagrange Multiplier method）.

(25%)

(三) 有 A, B 兩個 $n\times n$ 之 Matrices，其關係式為

(25%) $A=(I+sB)^{-1}(I-sB)$

請求出 λ_A 及 λ_B 之關係

（提示 $A\vec{x}=\lambda_A\vec{x}$ 及 $B\vec{x}=\lambda_B\vec{x}$）

$s=$ 常數，
$I=$ Identity Matrix
$\lambda_A=A$ 之 Eigenvalue
$\lambda_B=B$ 之 Eigenvalue

(四) 請求解

(25%)

$u_{tt}-u_{xx}=0$ for $0<x<1$, $t>0$.

$u(x,0)=1$ for $0\le x\le 1$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin^3\pi x$ for $0\le x\le 1$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0$.

求出 $u(\frac{1}{2},2)=?$