

淡江大學 95 學年度碩士班招生考試試題

系列：機械與機電工程學系

科目：動力學

62

[每題 20 分]

准帶項目請打「V」	
✓	簡單型計算機

本試題共 2 頁 (1/2)

本試題雙面印製

以下有 5 道題目，大多是數理推導的問題，即使你之前沒有看過或深入思考過，也請你耐心按著提示嘗試答題。只要方向正確，就算答案不對，也不會給零分：

- 對於某質點的動力問題(隨時間變動座標位置)描述，可使用許多正交座標(orthogonal coordinate)為之。今若使用極座標(polar coordinate) (r, θ) 來描述質點的運動狀態，假設位置 $\underline{r} = r \underline{e}_r$ ；速度 $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ ；加速度 $\underline{a} = \ddot{\underline{r}}$ ；而沿著 r 與 θ 方向的單位向量為 \underline{e}_r 與 \underline{e}_θ 。請利用“圖解”的方式，說明：

$$\dot{\underline{e}}_r = \frac{d}{dt}(\underline{e}_r) = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \quad \text{—— (1)}$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = \frac{d}{dt}(\underline{e}_\theta) = -\dot{\theta} \underline{e}_r \quad \text{—— (2)}$$

- 上一題若不會寫，本題也不要放棄。請利用(1)、(2)兩式代入 Newton's 2nd law

$$\underline{f} = m \underline{a} = f_r \underline{e}_r + f_\theta \underline{e}_\theta$$

並證明出

$$f_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) m \quad \text{—— (3)}$$

$$f_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) m \quad \text{—— (4)}$$

- Newton 假定重力 f_r 如下，若無其他外力，

$f_r = \frac{-GMm}{r^2}$ ， $f_\theta = 0$ 代入(3)、(4)兩式，可以得到 $r(t)$ 與 $\theta(t)$ 耦合(couple)在一起的非線性 O.D.E. 組。請由(4)式出發，證明克卜勒第二行星運動定律。

准帶項目請打「V」	
V	簡單型計算機

(續 3.)

(Kepler's 2nd law: Every planet moves in such a way that its radius vector sweeps over "equal areas in equal times.")

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$$

4. (3)、(4) 兩式還可以延伸應用到其他問題，例如“單擺”

(a) 請令 $r=l$ = 定值， $\theta = \theta(t)$ ，推導出 $\theta(t)$ 的階常微分控制方程式 (非線性)。

(b) 另外請利用 Lagrange's 方程式，推導 (核對) (a) 小題的 $\theta(t)$ 控制方程式。

已知 Lagrange's 方程式 (for a conservative system, a single-pendulum here.)

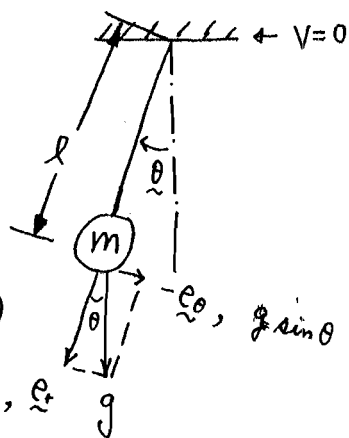
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

where

$$L = T - V$$

T = kinetic energy ($\frac{m}{2} v^2$; $v = r\dot{\theta}$, ---)

V = potential energy (單擺繩子繫牆處假設為 0)



5. Lagrange's 方程式適合處理較複雜的多自由度問題，如右圖之

“雙擺” (double pendulum)。請試

統合 $T (= \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2)$ 與 V ，並利用：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, 2), \text{ 導出 } \theta_1(t) \text{ 與 } \theta_2(t) \text{ 之控制方程組。}$$

