淡江大學九十三學年度碩士班招生考試試題

系別：物理學系　　　　科目：物 理 數 學

准帶項目請打「○」否則打「×」
簡單型計算機　×

本試題共 貳 頁

本試題雙面印製

P1

1. 已知

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

(a) 試求 $f(x)$ 的傅里葉級數 (Fourier Series)　(10%)

(b) 依 (a) 的級數，證明下式

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\cdots$$　(10%)

2. 試求微分方程式的完整解　(15%)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \sin x$$

3. (a) 計算

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$$　(10%)

(b) 已知向量函數 $\vec{F} = xy\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^3\hat{k}$。計算向量 $\vec{F}$ 對封閉面 S 的面積分 $\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$，此封閉面 S 係由 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ 立方体所形成.　(10%)

4. (a) 計算矩陣 A 的特徵值 (eigenvalue) 與特徵向量 (eigenvector)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$　(15%)

(b) 若矩陣 X 能將 (a) 的矩陣 A 化為對角化矩陣，即

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$　(10%)

λ_1, λ_2 及 λ_3 為矩陣 A 的特徵值，則矩陣 X 為何？[註：你可直接寫出，不用演算]

◄注意背面尚有試題►

淡江大學九十三學年度碩士班招生考試試題

系別：物理學系　　　　科目：物　理　數　學

准帶項目請打「○」否則打「x」	
簡單型計算機	X

本試題共 貳 頁

5. 利用餘式積分法 (Residue integration method)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res.}\, f(z)$$

及

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \text{Im}\left[2\pi i \sum_{y>0} \text{Res.}\, f(z)e^{i\alpha z}\right],\quad \alpha>0$$

計算 (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx$　　(10%)

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+4}\,dx$　　(10%)

註：可用到的積分：

(1) $\displaystyle\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax$

(2) $\displaystyle\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax - \frac{x^2}{a}\cos ax$

(3) $\displaystyle\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + \frac{x^2}{a}\sin ax$