

淡江大學 101 學年度進修學士班轉學生招生考試試題

系別：統計學系三年級

科目：機率與管理數學

考試日期：7 月 18 日(星期三) 第 3 節

本試題共 7 大題， 1 頁

1. 令 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ ，試證明 $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ 。(10 分)

2. 已知 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx = 0.3413$ ，試求 $\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_0^4 e^{-(x-2)^2/8} dx$ 之值。(10 分)

3. 已知某離散型隨機變數 X 的機率分布為：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- a) 試寫出常數 c 的計算公式。(7 分)
- b) X 的期望值 $E(X)$ 是否存在？請討論！(10 分)

4. 令 $F(x) = \frac{cx}{\sqrt{1+x^2}} + d$ ， $x \in R$ ，且已知 F 為隨機變數 X 的累加分布函數(cumulative distribution function)。

- a) c 與 d 之值分別為何？(提示：利用 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ 與 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ 求解)(10 分)
- b) 試推導出 X 的機率密度函數(probability density function)。(8 分)

5. 若某隨機變數 Y 的機率密度函數為 $f(y) = c(1 - y^2)$ ， $y \in [-1, 1]$ ，試計算：

- a) 常數 c 之值。(5 分)
- b) Y 的期望值。(5 分)
- c) Y 的中位數(median)。(5 分)

6. 根據淡江保險公司的經驗，駕駛人可分為有肇事傾向及無肇事傾向兩大類，並且該公司的統計資料顯示，有肇事傾向的保戶在一年內會肇事的機率為 0.4，而無肇事傾向者的一年內肇事機率則為 0.2。假設全部客戶中有肇事傾向者佔 30%，若已知一新投保人在一年內肇事，則此人具有肇事傾向的機率為何？(10%)

7. 已知兩隨機變數 X, Y 的聯合密度函數(joint density function)為：

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- a) 請分別求出 X 與 Y 的邊際機率密度函數 (10 分)
- b) 請討論 X 與 Y 是否為獨立隨機變數。(5 分)
- c) 請計算 X 與 Y 的相關係數 $\rho_{X,Y}$ 。(5 分)