

淡江大學 100 學年度進修學士班轉學生招生考試試題

系別：統計學系三年級

科目：機率與管理數學

考試日期：7 月 20 日(三) 第 3 節

本試題共 10 大題， 1 頁

1. 求下列極限

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 5^x}$ (6 分)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln \left| \sqrt{1+x^2} - 1 \right| - 2 \ln \left| \sqrt{1+x} - 1 \right| \right\}$ (6 分)

2. 求下列導函數 $\frac{dy}{dx}$

(a) $y = (\sin x)^{\cos x}$ (5 分)

(b) $x^2 + xy + y^2 = 1$ (5 分)

3. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，若 $f(x)$ 在 $x = -1$ 時有相對極大值為 2，在 $x = 1$ 時有相對極小值為 -1，求 $f(x)$ 。(7 分)

4. 求下列積分

(a) $\int \frac{x}{(2x+1)^3} dx$ (7 分)

(b) $\int x \sec^2 x dx$ (7 分)

5. 求一水平線 $y = k$ ，將曲線 $y = x^2$ 和 $y = 9$ 所圍成區域的面積分割成兩個相等的部分。(7 分)6. n 為正整數，設

$$f(x) = \begin{cases} k3^x, & x = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

若 $f(x)$ 為一機率分配，求 k 值。(8 分)7. 設 X_1, X_2, \dots, X_n 為從平均數為 μ ，變異數為 σ^2 的機率分配 $f(x)$ 所抽出的 n 個隨機樣本，令

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}, \text{證明 } E(S^2) = \sigma^2. \text{ (10 分)}$$

8. 設一箱子中放有 3 顆球，分別標號為 1、2、3 號，今從箱子中以抽出不放回的方式依序抽出 2 顆球，令 X 、 Y 分別表抽出的第 1 顆球和第 2 顆球的球號，求 $Cov(X, Y)$ 。(8 分)9. 設隨機變數 X 和 Y 的聯合機率分配為

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求當 $X = x$ 時， Y 的條件機率分配 $f(y | X = x)$ 。(8 分)10. 設隨機變數 X 服從自由度為 n 的卡方分配，令 $Y = \sqrt{X}$ ，(a) 求 Y 的期望值。(8 分)(b) 求 Y 的機率分配。(8 分)