

系別：統計學系三年級

科目：機率與管理數學

可否使用計算機			
可		否	✓

本試題共 11 大題， 1 頁

1. 求下列極限值 (每小題 5 分)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

2. 求下列函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ (每小題 5 分)

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ (b) $f(x) = x^{\tan x}$

3. 求下列不定積分 (每小題 6 分)

(a) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx$ (b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

4. 已知 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ，求 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$ 。(6 分)

5. 求重積分 $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$ 。(7 分)

6. 若 A 和 B 兩事件為獨立，且 $P(A) = P(B|A) = \frac{1}{2}$ ，求 $P(A \cup B)$ 。(7 分)

7. 假設一隨機變數 X ，滿足 $E(X) = 20$ ， $\sigma^2(X) = 9$ ，利用 Chebyshev 不等式，求 X 落在 16 至 24 之間的大約機率值。(7 分)

8. 假設隨機變數 X 的分配函數(distribution function)為

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{8} x^{\frac{3}{2}}, & 0 < x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \end{cases}$$

求 X 的期望值。(7 分)

9. 若隨機變數 X 服從 Poisson 分配且 $P(X=1) = P(X=2)$ ，求 $P(X=1 \text{ 或 } X=2)$ 。(7 分)

10. 假設 X_1, X_2, X_3 為 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，

- (a) 請問 $X_1 + X_2 + X_3$ 服從什麼機率分配？(4 分)
 (b) 證明(a)的結論。(8 分)

11. 假設隨機變數 X 的動差母函數為

$$m(t) = \frac{2}{5} e^t + \frac{1}{5} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{3t}$$

求 X 的期望值及變異數。(10 分)