

# 淡江大學八十八學年度日間部轉學生招生考試試題

系別：數學系數理統計組三年級

科目：機率與統計學

本試題共 2 頁

1.  $X$  為一隨機變數 (r.v.)，其機率密度函數為  $f(x) = (4-x)/16$ ，  
 $-2 < x < 2$ ，  
(p.d.f.)

(i) 試求其分布函數  $F(x)$ 。 (5%)

(ii) 試求其期望值 (expectation)  $EX$ ，與變異數 (variance)  $\text{Var} X$ 。 (8%)

(iii) 若  $Y = X^2$ ，試求  $P(Y \leq 1)$ 。 (6%)

(iv) 試求  $Y$  的 p.d.f.  $f_Y(y)$  及其 d.f.  $F_Y(y)$ 。 (6%)

2. 若一組樣本  $X_1, \dots, X_n$  為 i.i.d. Poisson( $\lambda$ ) 分布 ( $X_i$  的 p.d.f.

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad i=1, \dots, n).$$

(i) 試證  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  為 Poisson( $n\lambda$ ) 分布。 (13%)

(Hint: 利用 moment generating function  $\varphi(t) = E(e^{tx})$ .)

(ii) 試證  $X_1 = x | Y = y$  為 binomial 分布  $B(y, \frac{1}{n})$ 。 (12%)

3. 若  $X_1, \dots, X_n$  為 i.i.d.  $N(\mu, \sigma^2)$  分布，已知  $\sigma^2 = 4$ ，

欲檢定  $H_0: \mu = 3.0$  v.s.  $H_1: \mu = 3.5$ 。

(i) 今若  $n=100$ ， $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 3.2$ ，顯著水準  $\alpha = 0.05$ ，試問  
你的檢定結果。 (10%)

(Hint:  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ .)

(ii) 相對於此檢定的檢定力 (power) 為何？ (8%)

(iii) 若在相同  $\alpha = 0.05$  之下，欲達  $\text{power} = 0.9$ ，試問 sample  
size  $n$  需多大？ (7%)

# 淡江大學八十八學年度日間部轉學生招生考試試題

系別：數學系數理統計組三年級

科目：機率與統計學

本試題共 2 頁

本試題雙面印製

4. 若  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. 其 p.d.f.  $f(x; \theta) = (1/\theta) x^{(1-\theta)/\theta}$ .  
 $0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$ .

(i) 試證  $\theta$  的 maximum likelihood estimator (MLE) 為

$$\hat{\theta} = -\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \ln X_i. \quad (10\%)$$

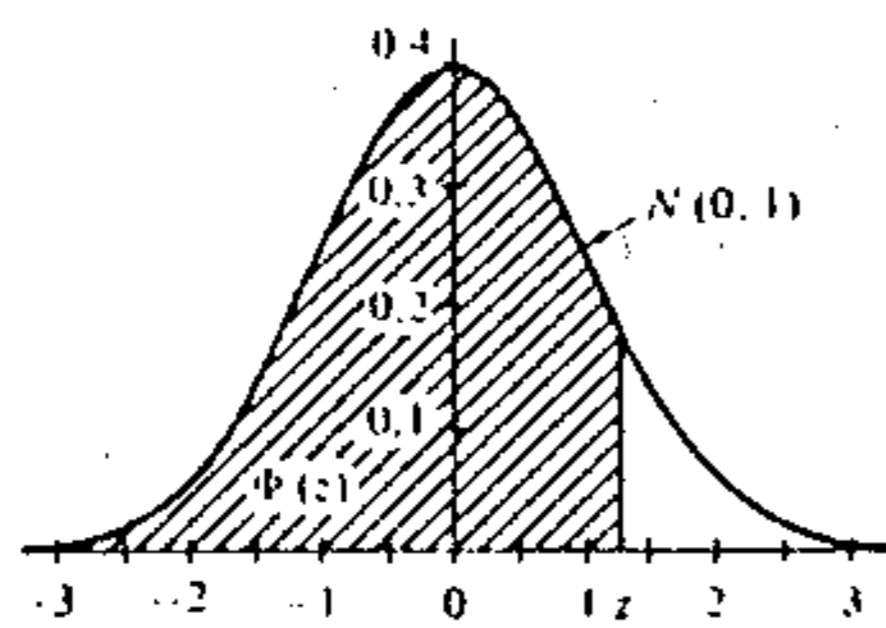
(ii) 試證  $E(\hat{\theta}) = \theta$ , 亦即  $\hat{\theta}$  為不偏的 (unbiased).

(10%)

(iii) 利用 method of moment, 試證  $\tilde{\theta} = (1-\bar{X})/\bar{X}$ .

(Hint:  $EX = g(\theta)$ , 再用  $\bar{X}$  取代  $EX$  解  $\tilde{\theta}$ .) (5%)

The Normal Distribution



$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$[\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)]$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
$z_{\alpha}$	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090
$z_{\alpha/2}$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.576	2.807	3.291