

淡江大學 101 學年度轉學生招生考試試題

系別：統計學系三年級

科目：機率與微積分

考試日期：7 月 17 日(星期二) 第 3 節

本試題共 7 大題， 1 頁

1. 試計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(e^{1/n} + e^{2/n} + \dots + e^{n/n})$ 之值。(提示： $e \approx 2.71828$) (12%)
2. 令函數 f 對所有的 x 值滿足 $x \sin(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ 。試計算 $f(\frac{1}{16})$ 之值。(提示：利用微積分基本定理) (10%)
3. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 為來自 $\text{Uniform}(0,1)$ 的獨立且隨機樣本，令隨機變數 $Y_n = n \times \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ，試求極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > y)$ 。(12%)
4. 令函數 f 定義為 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}, & x = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
 - a) 試證明 f 可以是某離散型隨機變數 X 的機率分布函數(提示： $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$)。(10%)
 - b) X 的期望值 $E(X)$ 是否存在？請討論！(8%)
5. 已知國道一號某路段的駕駛人中，60%為男性，40%為女性。此外，已知男性駕駛人中有 14%會超速駕駛，女性駕駛人中有 4%會超速駕駛，若某國道警察攔下一超速駕駛的車輛，則此駕駛人為男性的機率為何？(10%)
6. 已知隨機變數 X, Y 的聯合機率密度函數為 $f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
 - a) 試推導出隨機變數 Y 的邊際分布。(8%)
 - b) 試證明條件分布 $f_{X|Y}(x, y) = \begin{cases} 1/y, & 0 < x < y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (10%)
 - c) 試計算 $E(X)$ (提示：先計算 $E(X | Y)$)。(10%)
7. 試利用中間值定理(Intermediate Value Theorem)與洛爾定理(Rolle's Theorem)證明函數 $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x - 3$ 具有唯一的實數根。(10%)